

ตัวอย่างข้อสอบ PAT1 ระดับ ม.5-6 ครั้ง 1 และ 2

1. ถ้า $\cos \theta - \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ แล้วค่าของ $\sin 2\theta$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{4}{13}$ 2. $\frac{9}{13}$ 3. $\frac{4}{9}$ 4. $\frac{13}{9}$

เฉลย ข้อที่ 3

ยกกำลังทั้งสองข้าง $(\cos \theta - \sin \theta)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2$

$$\cos^2 \theta - 2 \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta = \frac{5}{9}$$

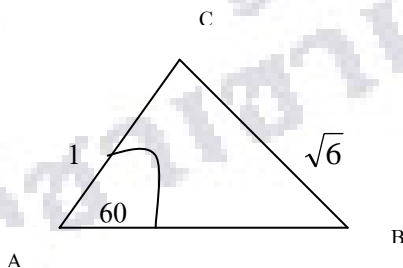
$$1 - \sin 2\theta = \frac{5}{9}$$

$$\sin 2\theta = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

2. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม A เท่ากับ 60° , $BC = \sqrt{6}$ และ $AC = 1$ ค่าของ $\cos(2B)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{4}$ 2. $\frac{1}{2}$ 3. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 4. $\frac{3}{4}$

เฉลยข้อ 4



จาก $\cos 2B = 1 - 2 \sin^2 B$

กฎของ sine จะได้ $\frac{\sin B}{1} = \frac{\sin 60}{\sqrt{6}}$ จะได้ $\sin B = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

ดังนั้น $\cos 2B = 1 - 2\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{3}{4}$

3. ให้ $-1 \leq x \leq 1$ เป็นจำนวนจริงซึ่ง $\arccos x - \arcsin x = \frac{\pi}{2552}$ แล้วค่าของ $\sin\left(\frac{\pi}{2552}\right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $2x$ 2. $1-2x^2$ 3. $2x^2-1$ 4. $-2x$

เฉลย ข้อ 2

กำหนด $A = \arccos x$ ดังนั้น $\cos A = x$ และ $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - x^2}$

เฉลย ข้อที่ 4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 1 & y \end{bmatrix}, M_{11} = xy-2 \text{ ดังนั้น } C_{11} = (-1)^{1+1}(xy-2) = xy-2 = 13$$

$$xy = 15 \dots \dots \dots 1$$

$$M_{21} = 2y+1, C_{21} = (-1)^{2+1}(2y+1) = 9$$

$$2y+1 = -9 \text{ ดังนั้น } y = -5 \text{ แทนในสมการ 1 ได้ } x = -3 \text{ สรุป}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

เลือกแถวที่ 1

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} = 1(13)(-1)^2 + 2(-14)(-1)^3 + (-1)(8)(-1)^4 = 33$$

7. กำหนดให้ \bar{u} และ \bar{v} เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย ถ้าเวกเตอร์ $\bar{u} + 2\bar{v}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $2\bar{u} + \bar{v}$ แล้ว $\bar{u} \cdot \bar{v}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{-4}{5}$

2. 0

3. $\frac{1}{5}$

4. $\frac{3}{5}$

เฉลยข้อ 1

$$\text{ให้ } \bar{u} = ai + bj \text{ และ } \bar{v} = ci + dj, \bar{u} + 2\bar{v} = (a+2c)i + (b+2d)j$$

$$2\bar{u} + \bar{v} = (2a+c)i + (2b+d)j \text{ ทั้งสองตั้งฉากกันดังนั้น}$$

$$(\bar{u} + 2\bar{v}) \cdot (2\bar{u} + \bar{v}) = 0$$

$$(a+2c)(2a+c) + (b+2d)(2b+d) = 0$$

$$2a^2 + 5ac + 2c^2 + 2b^2 + 5db + 2d^2 = 0 \text{ เนื่องจาก } \bar{u} \text{ และ } \bar{v} \text{ เป็นเวกเตอร์ 1 หน่วย ดังนั้นขนาดคือ 1}$$

$$\text{หรือ } a^2 + b^2 = 1 \text{ และ } c^2 + d^2 = 1 \text{ ส่วน } \bar{u} \cdot \bar{v} = ac + bd \text{ ดังนั้น}$$

$$2(a^2 + b^2) + 2(c^2 + d^2) + 5(ac + bd) = 0$$

$$2(1) + 2(1) + 5\bar{u} \cdot \bar{v} = 0 \text{ ดังนั้น } \bar{u} \cdot \bar{v} = \frac{-4}{5}$$

8. ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 b + 1}{2n^2 a - 1} = 1$ แล้วผลบวกของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{ab}{a^2 + b^2} \right)^n$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. $\frac{1}{3}$ 2. $\frac{2}{3}$ 3. 1 4. หาค่าไม่ได้

เฉลยข้อ 2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 b + 1}{2n^2 a - 1} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2 b}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{\frac{2n^2 a}{n^2} - \frac{1}{n^2}} = 1 \text{ ดังนั้น } \frac{b}{2a} = 1, b = 2a \text{ แทนในคำถามจะได้}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a(2a)}{a^2 + (2a)^2} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2a^2)}{5a^2} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5} \right)^n \text{ ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิต}$$

$a_1 = 2/5$ และ $r = 2/5$ ดังนั้น $s_{\infty} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{2/5}{1-2/5} = \frac{2}{3}$

9. ถ้า a_1, a_2, a_3, \dots เป็นลำดับเรขาคณิตซึ่ง $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4$ แล้วค่ามากที่สุดที่เป็นไปได้ของ a_2 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. 4 2. 2 3. 1 4. หาค่าไม่ได้เพราะ a_2 มีค่ามากได้อย่างไม่มีขีดจำกัด

เฉลยข้อ 3

จากสูตรอนุกรมเรขาคณิตเมื่อ n เข้าสู่นันต์คือ $s_{\infty} = \frac{a_1}{1-r} = 4$ ดังนั้น $a_1 = 4 - 4r$

$$a_2 = a_1 r = (4 - 4r) r = 4r - 4r^2 \text{ เป็นพาราโบลาคว่ำจุดสูงสุดอยู่ที่ } h = \frac{-4}{2(-4)} = \frac{1}{2}$$

ค่าสูงสุดคือ $k = 4(0.5) - 4(0.5)^2 = 2 - 1 = 1$

10. กำหนดให้ \bar{u} และ \bar{v} เป็นเวกเตอร์ขนาด 1 หน่วย ถ้าเวกเตอร์ $3\bar{u} + \bar{v}$ ตั้งฉากกับ $\bar{u} + 3\bar{v}$ จงหาเวกเตอร์ $5\bar{u} - \bar{v}$ มีขนาดเท่ากับข้อใด
- ก. 3 ข. $3\sqrt{2}$ ค. 4 ง. $4\sqrt{2}$

เฉลยข้อ ง

ให้ $\bar{u} = ai + bj$ และ $\bar{v} = ci + dj$, $\bar{u} + 3\bar{v} = (a + 3c)i + (b + 3d)j$

$$3\bar{u} + \bar{v} = (3a + c)i + (3b + d)j \text{ ทั้งสองตั้งฉากกันดังนั้น}$$

$$(3\bar{u} + \bar{v}) \cdot (\bar{u} + 3\bar{v}) = 0$$

$$(3a + c)(a + 3c) + (3b + d)(b + 3d) = 0$$

$$3a^2 + 10ac + 3c^2 + 3b^2 + 10bd + 3d^2 = 0 \text{ เนื่องจาก } \bar{u} \text{ และ } \bar{v} \text{ เป็นเวกเตอร์ 1 หน่วยดังนั้นขนาดคือ 1}$$

หรือ $a^2 + b^2 = 1$ และ $c^2 + d^2 = 1$ ส่วน $\bar{u} \cdot \bar{v} = ac + bd$ ดังนั้น

$$3(a^2 + b^2) + 3(c^2 + d^2) + 10(ac + bd) = 0$$

$$3(1) + 3(1) + 10(ac + bd) = 0 \text{ ดังนั้น } ac + bd = -0.6$$

$$\begin{aligned} \text{เป้าหมายคือหา } 5\bar{u} - \bar{v} &= (5a - c)i + (5b - d)j \text{ ขนาดคือ } \sqrt{(5a - c)^2 + (5b - d)^2} \\ &= \sqrt{25a^2 - 10ac + c^2 + 25b^2 - 10bd + d^2} = \sqrt{25(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) - 10(ac + bd)} \\ &= \sqrt{25(1) + (1) - 10(-0.6)} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

11. กำหนดให้ a_n เป็นลำดับเลขคณิตที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n - a_1}{n} \right) = 5$ ถ้า $a_9 + a_5 = 100$ จงหา a_{100} เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 500

ข. 515

ค. 520

ง. หากค่าไม่ได้เพราะข้อมูลไม่เพียงพอ

เฉลยข้อ ข

จากข้อกำหนดเรื่องอนุกรมเลขคณิต $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n - a_1}{n} \right) = d = 5$

$a_9 + a_5 = a_1 + 8(5) + a_1 + 4(5) = 100$ ดังนั้น $a_1 = 20$

$a_{100} = a_1 + 99(5) = 20 + 99(5) = 515$

12. ถ้า $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{1 + 8 + 27 \dots + n^3} \right)$ มีค่าเป็นจำนวนจริงบวกแล้ว ค่าของ A มีค่าเท่าใด

ก. 0

ข. 2

ค. 4

ง. 8

เฉลยข้อ ก

จากสูตร $\sum n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{1 + 8 + 27 \dots + n^3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{\left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{(n+1)^2} \right) = 0$$

13. ถ้า $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^4 - n^2} = A$ แล้ว $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. $\frac{3}{4} + A$

ข. $\frac{5}{4} + A$

ค. $\frac{3}{4} - A$

ง. $\frac{5}{4} - A$

เฉลยข้อ ค

$\frac{1}{n^4 - n^2} = \frac{1}{(n^2 - 1)} - \frac{1}{n^2}$ กำหนดให้ $B = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

ดังนั้น $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) = A + B$

แทนค่า $n = 2, 3, 4, 5, \dots$ ใน $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$ ได้

$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots - \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$ เมื่อ n เข้าสู่อนันต์ $\frac{1}{n+1} = 0$

$$\text{ดังนั้น } \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = A + B \quad \text{ดังนั้น } B = \frac{3}{4} - A$$

14. ถ้า f , g และ h สอดคล้องกับ $f(1)=g(1)=h(1) = 1$ และ $f'(1) = g'(1) = h'(1) = 2$ แล้วค่าของ $(f \cdot g + h)'(1)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- ก. 1 ข. 2 ค. 4 ง. 6

เฉลยข้อ ง

จากโจทย์สรุปได้ว่า $f = g = h = mx + c$ เป็นสมการเส้นตรง โดยที่ $m = 2$ และ $c = -1$ กำหนดให้

$$A(x) = (fg+h) = (2x-1)^2 + (2x-1)$$

$$A'(x) = 2(2x-1)(2) + 2$$

$$A'(1) = 2(2(1)-1)(2) + 2$$

$$A'(x) = 6$$

15. เส้นตรงซึ่งตั้งฉากกับเส้นสัมผัสของเส้นโค้ง $y = 2x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ ที่จุด $x = 1$ คือเส้นตรงในข้อใดต่อไปนี้

- ก. $13x - 2y - 11 = 0$ ข. $13x + 2y - 15 = 0$ ค. $2x - 13y + 11 = 0$ ง. $2x + 13y - 15 = 0$

เฉลยข้อ ง.

$$\text{ความชันของเส้นสัมผัสคือ } y' = 6x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^{1.5}}\right)$$

$$y' = 6(1)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1)^{1.5}}\right)$$

$$y' = \frac{13}{2} \quad \text{เส้นตรงที่ตั้งฉากด้วยจะมีความชัน } \frac{-2}{13} \quad \text{ผ่านจุด } (1, 1)$$

$$\text{สมการเส้นตรงคือ } y - 1 = \frac{-2}{13}(x - 1)$$

$$13y - 13 = -2x + 2$$

$$2x + 13y - 15 = 0$$

16. ค่าของ $\frac{\sin 30}{\sin 10} - \frac{\cos 30}{\cos 10}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- ก. -1 ข. 1 ค. 2 ง. -2

เฉลยข้อ ค.

$$\frac{\sin 30}{\sin 10} - \frac{\cos 30}{\cos 10} = \frac{\sin 30 \cos 10 - \cos 30 \sin 10}{\sin 10 \cos 10} = \frac{\sin(30 - 10)}{1(2 \sin 10 \cos 10)} = \frac{2 \sin 20}{2 \sin 20} = 2$$

17. ถ้า $\arcsin(5x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$ จงหาค่า $\tan(\arcsin x)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- ก. 1/5 ข. 1/3 ค. $1/\sqrt{3}$ ง. 1/2

เฉลยข้อ ก.

กำหนด $\arcsin 5x = A$ ดังนั้น $\sin A = 5x$

$\arcsin x = B$ ดังนั้น $\sin B = x$ ดังนั้น $\sin A = 5\sin B$

$$\text{ดังนั้น } A + B = \frac{\pi}{2}$$

ใส่ \cos ทั้งสองข้างได้

$$\cos A \cos B - \sin A \sin B = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\cos A \cos B = \sin A \sin B$$

$$\cot A = \tan B \text{ แสดงว่า } A + B = 0$$

$$\text{จาก } \sin A = 5\sin B$$

$$\sin(90-B) = 5\sin B$$

$$\cos B = 5\sin B$$

$$\tan B = 1/5$$

$$\tan(\arcsin x) = 1/5$$

18. กำหนด $x, y > 0$ ถ้า $x^y = y^x$ และ $y = 5x$ แล้วค่าของ x อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

ก. $[0,1)$ ข. $[1, 2)$ ค. $[2,3)$ ง. $[3,4)$

เฉลย ข้อ ข

$$x^{5x} = (5x)^x$$

ใส่ Log ทั้งสองข้างได้

$$5x \text{Log}(x) = x \text{Log}(5x)$$

$$5 \text{Log}(x) = \text{Log} 5 + \text{Log} x$$

$$4 \text{Log}(x) = \text{Log} 5$$

$$\text{Log}(x) = \text{Log}(5)^{\frac{1}{4}} \text{ ดังนั้น } x = 5^{\frac{1}{4}} \text{ ถอดรากที่ 4 ได้ประมาณ 1.5}$$

19. กำหนดให้ $a, b, c > 1$ ถ้า $\log_a d = 30$, $\log_b d = 50$ และ $\log_{abc} d = 15$ จงหาค่า $\log_c d$ เท่ากับข้อใด

ก. 75 ข. 90 ค. 120 ง. 150

เฉลยข้อ ก.

$$\frac{\log d}{\log a} = 30 = \frac{150}{5}$$

$$\frac{\log d}{\log b} = 50 = \frac{150}{3}$$

ดังนั้น $\log d = 150$, $\log a = 5$ และ $\log b = 3$

$$\frac{\log d}{\log a + \log b + \log c} = 15$$

$$\frac{150}{5 + 3 + \log c} = 15 \text{ ย้ายข้างได้ } \log c = 2$$

$$\text{หา } \frac{\log d}{\log c} = \log_c d = \frac{150}{2} = 75$$

20. ถ้า x, y, z เป็นจำนวนจริงซึ่งสอดคล้องกับสมการเชิงเส้น

$$2x - 2y - z = 1$$

$$x - 3y + z = 7$$

$$-x + y - z = -5$$

จงหาค่า $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 0

ข. 2

ค. 5

ง. 8

เฉลยข้อ ก

$$2x - 2y - z = 1 \dots\dots\dots 1$$

$$x - 3y + z = 7 \dots\dots\dots 2$$

$$-x + y - z = -5 \dots\dots\dots 3$$

นำ (2)+(3) ได้ $-2y = 2$ ดังนั้น $y = -1$

นำ (1)+(2) ได้ $3x - 5y = 8$

$$3x - 5(-1) = 8$$

$$X = 1 \text{ แทน } x \text{ และ } y \text{ ใน (3) ได้ } z = 3$$

$$\frac{1}{1} + \frac{2}{-1} + \frac{3}{3} = 1 - 2 + 1 = 0$$